TESINA PER L'ESAME DI STATO
A.S. 2016/2017

Mondo Matematico

di *Arianna Aguirre*

Il presente contributo, elaborato dalla **studentessa Arianna Aguirre** del Liceo Classico Socrate di Roma, è connesso alle attività scientifiche e laboratoriali svolte durante lo ***"Stage a Tor Vergata"*** - promosso dal Piano nazionale Lauree Scientifiche e tenuto presso i laboratori della Macroarea di Scienze MFN dell'**Università degli Studi di Roma Tor Vergata** in due fasi:

- Stage Estivo dal 13 al 17 Giugno 2016;
- Stage Invernale dal 6 al 10 Febbraio 2017.

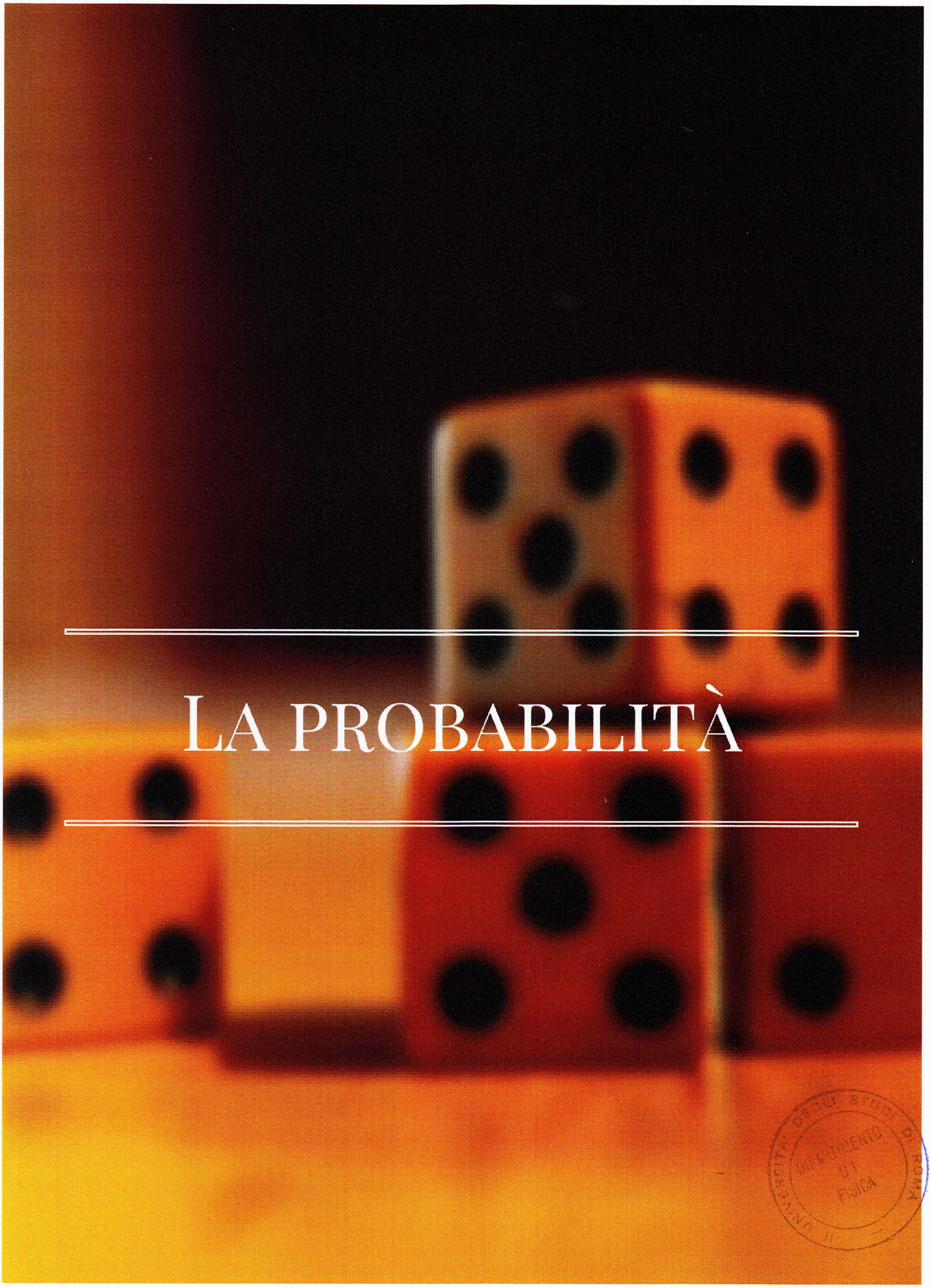
Le attività didattiche previste nel Programma dello Stage sono state realizzate in cinque gruppi di ricerca, guidati da docenti dell'Università di Roma Tor Vergata.

Il responsabile scientifico del Modulo "Mondo Matematico"

Prof. Benedetto Scoppola ....

Il Direttore degli "Stage a Tor Vergata"

Prof. Nicola Vittorio ....



LA PROBABILITÀ

INDICE

Introduzione alla probabilità

1. Cenni storici

Le origini del calcolo della probabilità sono relativamente recenti. Nel mondo antico si discuteva, per esempio tra i filosofi greci, del concetto di probabilità ma, con qualche rara eccezione, era assente ogni valutazione quantitativa. La prima trattazione di problemi di probabilità a noi nota si trova nel libro *"De ludo alae"* di Gerolamo Cardano, pubblicato postumo nel 1633. Tra considerazioni morali e suggerimenti pratici è inserito il problema delle probabilità dei punteggi che si ottengono (come somma) lanciando tre dadi. Il risultato contiene qualche inesattezza ma la sua importanza storica è indubbia, soprattutto per le considerazioni probabilistiche che vengono svolte; in particolare viene accennata la legge empirica del caso.
Ma la nascita del calcolo delle probabilità viene attribuita all'interesse di Blaise Pascal, risvegliato dal Cavalier de Meré, matematico e accanito giocatore d'azzardo. Altri matematici si interessarono a tali argomenti; tra i primi Christiaan Huygens che con il suo scritto *"De ratiociniis in ludo aleae"* diede il primo trattato di calcolo delle probabilità. Seguono poi i matematici svizzeri Bernouilli, tra i quali Jakob, autore di *"Ars coniectandi"* al cui nome sono legati un famoso teorema e un fondamentale modello matematico.

1.2La definizione classica della probabilità

La prima definizione di probabilità, detta perciò "classica", si ritrova già in Pascal, e definisce la probabilità di un evento come *il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano tutti ugualmente possibili*. I sostenitori di questa definizione affermano che l'uguale possibilità è un dato di fatto che si riscontra in certe situazioni. Dalla definizione segue immediatamente che la probabilità è un numero compreso tra zero (quando nessun caso è favorevole) e uno (quando tutti i casi sono favorevoli); in particolare si ha il valore uno quando l'evento è certo. Si ha inoltre un'altra conseguenza: l'additività della probabilità o la legge delle probabilità totali. Tale legge nella sua forma più semplice, si enuncia dicendo che *se due eventi sono incompatibili la probabilità della loro unione è uguale alla somma delle probabilità dei due eventi.*

1.3 Prova, evento, probabilità

Per chi aderisce alla definizione classica, la prova deve dare un insieme finito di alternative equiprobabili, o almeno deve essere collegabile in qualche modo a prove di tal genere. Solo in prove che rispondano a questi requisiti, e per eventi relativi a tali prove, si può parlare di probabilità. L'evento per definizione è qualcosa che può succedere ma non è sicuro che accada, nello specifico, un evento elementare è il singolo risultato di ogni esperimento. Tutti gli eventi elementari hanno la stessa proprietà.

Due eventi A e B si dicono indipendenti se il verificarsi dell'uno non influisce sul calcolo della probabilità dell'altro.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Due eventi A e B si dicono dipendenti se il verificarsi dell'uno influisce sul calcolo della probabilità dell'altro. P(A|B) Definiamo probabilità condizionata dell'evento A rispetto all'evento B la probabilità che si verifichi l'evento A dopo che si è verificato l'evento B

Le variabili aleatorie

2.1 Definizione di variabile aleatoria

Il risultato di una prova è in molti casi un numero, che è chiaramente aleatorio, cioè incerto prima della prova per diventare determinato. A volte il numero che ci interessa è l'espressione diretta della prova, altre volte lo otteniamo con una elaborazione sui risultati della prova. Le prove sono numeri aleatori ma vengono più frequentemente chiamate variabili aleatorie, o casuali, con un'espressione che fa riferimento alla loro attitudine ad assumere valori diversi.

Introduzione ai processi aleatori

3.1 Che cos’è un processo aleatorio o stocastico

Andrej Andreevič Markov è stato un matematico e statistico russo, noto per i suoi contributi alla teoria della probabilità e alla statistica. Ideò un particolare processo stocastico, detto processo markoviano o catena di Markov. Il processo stocastico è un

insieme ordinato di variabili casuali in funzione del tempo, in cui l’insieme può essere finito, infinito numerabile oppure infinito non numerabile. Non a caso il termine stocastico deriva dal greco “στοχαζομαι” che significa mirare o congetturare. Un punto fondamentale nell’analisi del processo stocastico è la dipendenza ipotetica tra le variabili casuali. Il TASEP, modello di riferimento del nostro stage è un modello stocastico studiato in una posizione di non-equilibrio, in particolare è stato usato per studiare il modello intracellulare del traffico urbano. Si definisce processo stocastico markoviano, un processo aleatorio (o stocastico) nel quale la probabilità di transizione che determina il passaggio a uno stato di sistema dipende solo dallo stato di sistema immediatamente precedente (proprietà di Markov) e non dal come si è giunti a tale stato.

3.3 Catene di Markov

Il modello di Bernoulli, o delle prove ripetute, è alla base di importanti sviluppi nello studio della convergenza. Lo stesso accade per i processi aleatori. Una delle principali caratteristiche delle passeggiate aleatorie è che, una volta raggiunta una posizione **X**n, l’andamento del processo dipende solo da **X**n e non dalla storia precedente. Si tratta di un aspetto importante, tanto che per molto tempo è stato assunto come principio in fisica: lo stato presente di un sistema permette di studiarne l’andamento futuro senza alcun riferimento al passato. È per cogliere questo aspetto che il matematico Marcov introdusse lo studio di modelli che prendono il suo nome. Più in generale un processo aleatorio si dice marcoviano se la distribuzione di probabilità dipende solo dal valore assunto nell’ultimo istante in cui tale valore è noto, e non dai valori assunti precedentemente. Un processo marcoviano si dice *omogeneo* (nel tempo) o stazionario se le probabilità condizionate che figurano nella prima non variano quando si aggiunge una costante a tutti i valori del parametro. In altre parole esse dipendono non dai valori del parametro ma solo dalle loro differenze; si può dire che sono invarianti rispetto a traslazioni nel tempo.